第 14 卷　第 4 期　　运 筹 与 管 理　　Vol. 14 ,No. 4
2005 年 8 月　　OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE　　Aug. 2005

"物流配送中心选址的随机数学模型"的有效性研究

衣方磊，徐寅峰，辛春林

(西安交通大学 管理学院，陕西 西安 710049)

摘　要:从实际应用出发,对文献[1]中提出物流配送中心选址的随机数学模型进行了有效性分析。通过计算机模拟得到的数据,分别应用随机数学模型和传统选址方法对不同规模的配送网络进行选址,通过分析两者在不同条件下的总费用,得到了该随机模型的一些有趣的性质,为实际中的应用提供了依据。

关键词:运筹学;有效性;数值模拟;随机数学模型

中图分类号:F224.33　　**文章标识码**:A　　**文章编号**:1007-3221(2005)04-0019-06

Efficiency on Randomized Mathematic Model of Logistic System and Allocation of Its Distribution Center

YI Fang-lei , XU Yin-feng

(*School of Management , Xi'an Jiaotong University , Xi'an* 710049 , *China*)

Abstract :Based on the application to practicality we study the efficiency on randomized mathematic model of logistic system and allocation of its distribution center presented in literature[1]. Using the numerical simulated data , allocations of the distribution center are obtained by classical model and randomized mathematic model respectively in various scales of the logistic system ,and the total costs of them are calculated. Some interesting results are shown ,which can be used for reference in operational performance.

Key words :operational research ; efficiency ; numerical simulation ; randomized mathematic model

0　引言

随着现代经济的迅速发展,物流产业在市场经济的竞争中运作质量越来越高,规模也越来越大。物流配送中与生产、零售企业及众多的消费群体联成一体,成为供应链的核心。为了提高效率、节约成本,就必须对配送中心进行合理地选址[2,3]。在传统的物流配送中心选址模型中,大都假设各个需求点对某种商品的需求量是已知的常数[4~6],而实际上却并非如此,它们往往是由一系列存在一定关系的随机变量组成[1,7]。文[1]对该情形下的选址问题提出了随机数学模型的选址方法。本文根据模拟的试验数据对该模型的有效性和适用范围进行了研究,对该模型在实际中的应用具有一定的参考价值。

1　随机数学模型

一般来说,物流配送中心的选址问题可以描述为:在由 n 个需求点$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$组成的配送区域内,

收稿日期:2004-11-26

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371094,70121001)

作者简介:衣方磊(1976 -)男,山东省人,博士研究生,研究方向:中心选址与车辆调度优化;徐寅峰,男,博士生导师,研究方向:组合优化与调度。

选择其中一点设立一个配送中心,负责对所有需求点的货物供应,要求总的运输费用最小。若从配送中心到需求点的配送是放射状的[4],即运输车辆从配送中心出发,每次访问一个需求点后就返回到配送中心,令单位长度 ×需求量恒为常数 1,则该问题可表示为

寻找一个 k,使得

$$S = \min_{1 \le k \le n} S_k \tag{1}$$

其中

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} d_{ik} Q_i, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

(2) 式表示如果配送中心设在第 k 个城市(需求点),为满足各个需求点的需求所消耗的总费用;d_{ik} 表示城市 c_i 与 c_k 之间的最短距离,$i = 1, 2, \cdots, n$;Q_i 表示第 i 个需求点的需求量。

以往的模型中,各个需求点的需求量 $Q_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是假定已知的常数,但事实上,在确定配送中心 Q_i 时是不可能确定知道的。文[1]认为它们之间满足一定的相依关系(Dependence),并构成一个 n 维的同单调随机向量①,即 $Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\}$。

2　量化标准[1]

由于 Q_i 是一个随机变量,按照传统的方法将无法确定 k 的具体值。为此,引入一个用来比较随机变量"大小"(序)的标准,即积分停止 - 损失序[1,8]。

设有一分布函数为 $P(Q \le q) = F_Q(q)$ 的同单调随机变量 Q 和一个常数 r,则期望值 $E[(Q - r)_+]$ 称为 Q 的带有留值 r 的停止 - 损失函数,可表示为

$$E[(Q - r)_+] = \int_r^{\infty} \overline{F}_Q(q) \mathrm{d} q \tag{3}$$

其中 $(x)_+ = \max\{x, 0\}$,$\overline{F}_Q(q) = P(Q > q) = 1 - F_Q(q)$。对于随机变量 Q_1 和 Q_2,若有

$$\int_t^{\infty} E[(Q_1 - r)_+] \mathrm{d} r \le \int_t^{\infty} E[(Q_2 - r)_+] \mathrm{d} r \tag{4}$$

则认为在积分停止 - 损失序(Integrated Stop-Loss Order)的意义下,变量 Q_1 优于变量 Q_2。

为了计算同单调随机变量之和的停止 - 损止函数,即(2)式中每个 k 足标所对应的 S_k 的停止 - 损失函数,文[8]通过引入分布函数的 α - 混合反函数的概念给出了如下引理。

引理　定义随机变量 Q 的分布函数 $F_Q(q)$ 的 α - 混合反函数,为

$$F_Q^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_Q^{-1}(p) + (1 - \alpha) F_Q^{-1+}(p), \quad p \in [0, 1], \forall \alpha \in [0, 1] \tag{5}$$

其中,$F_Q^{-1}(p)$ 和 $F_Q^{-1+}(p)$ 分别为 $F_Q(q)$ 在闭区间 $[\inf\{q \in IR | F_Q(q) \ge p\}, \sup\{q \in IR | F_Q(q) \le p\}]$ 的两个端点上的反函数,即

$$F_Q^{-1}(p) = \inf\{q \in IR | F_Q(q) \ge p\}, \quad F_Q^{-1+}(p) = \sup\{q \in IR | F_Q(q) \le p\}, \quad p \in [0, 1] \tag{6}$$

若 $Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\}$ 为一个同单调的 n 维随机向量,令 $T = \sum_{i=1}^{n} Q_i$,则有

$$F_T^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{Q_i}^{-1(\alpha)}(p), \quad \forall 0 < p < 1, \forall 0 \le \alpha \le 1 \tag{7}$$

且对任何满足 $F_T^{-1+}(0) < r < F_T^{-1}(1)$ 的 r,有

$$E[(T - r)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(Q_i - r_i)_+] \tag{8}$$

其中,$F_T^{-1(\alpha)}$,$F_{Q_i}^{-1(\alpha)}$ 分别为分布函数 F_T 和 F_{Q_i} 的 α - 混合反函数;$r_i = F_{Q_i}^{-1(\alpha_r)}(Fr(r))$;$i = 1, 2 \cdots, n$;$\alpha_r$ 由 $F_T^{-1(\alpha_r)}(FT(r)) = r$ 决定。

① 设 $A \subset IR^n$ 是一个 n 维实向量集合。若对 A 中的如何两个元素 $x = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 与 $y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$,要么对 $\forall 1 \le i \le n$ 有 $x_i \ge y_i$,要么对 $\forall 1 \le i \le n$ 有 $x_i \le y_i$,则称集合 A 是同单调的。随机向量的同单调性描述的是它的各个分量之间"一大俱大"或"一小俱小"的一种性质。该性质在金融和保险领域有着很强的应用背景[9]。

根据(7)式和(8)式,只要给出每个需求点的需求函数 Q_i 的分布函数,便可求出(2)式中 S_k 的停止-损失函数,然后根据(4)式便可比较它们在积分停止-损失序意义下的"大小"。文[1]给出了具体的推导过程,本文只引用其最终结果,即,如果各个需求点的需求随机变量构成一个同单调的 n 维随机向量,且每个变量 Q_i 的分布函数是严格单调增加的,则有

$$\int_0^{\infty} E[(S_k - r)_+]\mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\int_0^{\infty} E[(Q_i - F_{Q_i}^{-1}(F_{S_k}(r)))_+]\mathrm{d}r = W_k, \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{9}$$

从求出的 $W_k(k = 1,2,\cdots,n)$ 中找出最小的一个 W_{k^*},则需求点 c_{k^*} 便是所要求的最佳配送中心的位置。

3　有效性的数值验证

由于上述的随机数学模型考虑了需求量的随机性,理论上讲是能够在一定程度上提高配送中心选址的合理性和正确性。但是,作为一种解决问题的新方法,我们必须对其有效性进行验证。例如,该方法在实际应用中与传统的方法相比,在费用的节省方面能有多大程度的提高?它与服务网络规模的大小有着怎样的关系?这些问题在以前的文献中从未进行过详细的讨论。本节通过计算机数值模拟的方法,构造了配送服务网络,并用上述随机模型和传统方法分别对其进行选址,得到最佳配送中心的位置分别为 c_{k1} 和 c_{k0};然后分别计算配送中心在 c_{k1} 时 c_{k0} 的总费用为 $Tc1$ 和 $Tc0$,通过改变服务网络规模(n 值)和配送次数(m 值)的大小,观察费用比($Tc0/Tc1$)的变化情况。具体步骤如下:

(1)构造配送服务网络

假设配送区域内的道路是无向的,则可以用一个无向网络图的三角邻接矩阵 L 来表示各个需求点之间的距离关系。如一个由需求点 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 组成的网络图可表示为

$$L = \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其中的元素 $a_{ij}(=a_{ji})$ 表示 c_i 到 c_j 之间的距离。在构造过程中它们的取值都是随机产生的(当 $i=j$ 时 $a_{ij}\equiv 0$)。

(2)构造随机需求序列

由于上一节给出的随机数学模型中,各个需求点的需求量 Q_i 是一个连续的随机变量,为了实际中的应用和本文的需要必须对其进行修正,即对其进行离散化。我们将 Q_i 视为一个满足某一概率分布的随机需求序列,即 $Q_i = \{q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{im}\}$。其中 m 表示配送计划中对需求点的配送次数。例如,计划欲设的配送中心对需求点进行物流配送的频率为 1 次/月,计划该配送中心的服务期限为 10 年,则该中心对需求点的配送次数为 $m = 10$ 年 $\times 12$ 次/年 $= 120$(次),即 $Q_i = \{q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{i120}\}$,而 q_{ij} 表示对需求点 i 第 j 次的配送量。

一般地讲,所有客户(需求点)的需求函数具有基本一致的形式,只是函数的参数不同[7],常用的需求函数有幂数函数形式和指数函数形式。这里我们采用指数函数形式,即需求点 i 的需求随机变量 Q_i 的分布函数可以写成

$$F_{Q_i}(q) = 1 - \exp(-\lambda_i \cdot q),\ \lambda_i > 0,\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{10}$$

要构造出具有上述分布函数的随机序列 $Q_i = \{q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{im}\}$,可以利用反函数法[10],得

$$q_{ij} = -\frac{1}{\lambda_i}\ln\beta_j,\quad j = 1,2,\cdots,m,\ i = 1,2,\cdots,n \tag{11}$$

其中,β_j 是(0,1)均匀分布的随机数。而 λ_i 对于不同的需求点 i 也是一个随机数。整个网络的需求量可以表示为 $Q = \{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$,其中,$Q_i = \{q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{im}\}(i = 1,2,\cdots,n)$。

(3)选址与总费用

首先用随机模型对上述构造的配送服务网络进行选址。根据(10)式,令 $F_{Q_i}(q) = p$ 解得 F_{Q_i} 的反函

数为

$$F_{Q_i}^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda_i}\ln(1-p), \quad 0 < p < 1 \tag{12}$$

由(7)式,得

$$F_{S_k}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{d_{ik}Q_i}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}F_{Q_i}^{-1}(p) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{d_{ik}}{\lambda_i}\cdot\ln(1-p) \tag{13}$$

令 $\frac{1}{D_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d_{ik}}{\lambda_i}$,则

$$F_{S_k}(q) = 1-\exp(-D_k\cdot q) \tag{14}$$

根据(9)式和(3)式,有

$$\begin{aligned} W_k &= \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\int_0^{\infty} E[(Q_i - F_{Q_i}^{-1}(F_{S_k}(r)))_+]\mathrm{d}r \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_{ik}\int_0^{\infty} dr \int_{F_{Q_i}^{-1}(F_{S_k}(r))}^{\infty}[1-F_{Q_i}(q)]\mathrm{d}q \end{aligned} \tag{15}$$

而 $F_{Q_i}^{-1}(F_{S_k}(r)) = -\frac{1}{\lambda_i}\ln(1-F_{S_k}(r)) = rD_k/\lambda_i$,代入(15)式,得

$$W_k = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d_{ik}}{\lambda_i}\right)^2 = \frac{1}{D_k^2} \tag{16}$$

比较 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的大小,其中最小的一个(W_{k1})所对应的需求点(c_{k1})便是要找的最佳配送中心的位置。

由于用传统的方法对配送中心进行选址时,对于各个需求点 $i(i=1,2,\cdots,n)$,需要先给定一个初始需求量。不失一般性,这个初始值可以从 $Q_i=\{q_{i1},q_{i2},\cdots,q_{im}\}(i=1,2,\cdots n)$ 中任意选择一个 q_{il},即 $Q_i = q_{il}(l=1,2\cdots m)$。根据(1)式和(2)式,便可求出配送中心的位置(c_{k0})。

令 $Tc1$ 和 $Tc0$ 分别表示配送中心在 c_{k1}和 c_{k0}时,为满足整个网络的总需求 $Q=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$所消耗的总费用,即

$$Tc1 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d_{k1,i}q_{ij} \tag{17}$$

$$Tc0 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} d_{k0,i}q_{ij} \tag{18}$$

它们的比值 $Tc0/Tc1$ 可以比较直观的反映随机数学模型相当于传统方法在费用节省方面的改进程度。

下面给出一个例子来做进一步的说明。

例 假设一个物流配送服务网络共有7($n=7$)个需求点,欲在其中寻找一点负责对该网络进行货物配送,计划配送的次数为10($m=10$)次。分别用随机模型和传统方法选出最佳配送中心的位置 c_{k1}和 c_{k0},并分别计算配送中心在 c_{k0}时和 c_{k1}时,完成整个配送任务所用总费用比 $Tc0/Tc1$。

首先,根据步骤1,随机构造一个配送服务网络,用三角邻接矩阵表示为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ \infty & 0 & & & & & \\ \infty & 3.0 & 0 & & & & \\ 9.2 & 4.5 & \infty & 0 & & & \\ \infty & \infty & 9.5 & 9.9 & 0 & & \\ \infty & 8.3 & \infty & \infty & 4.3 & 0 & \\ \infty & \infty & \infty & 3.5 & 3.8 & 8.9 & 0 \end{bmatrix}$$

其中,$a_{ij}=\infty$表示两顶点 i,j 之间无直接相连。

利用 Dijkstra 算法,求出任意两个需求点 c_i 和 c_j 之间的最短距离 $d_{ij}=d_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,用三角矩阵 U 表示为

$$U=\begin{bmatrix} 0 \\ 13.6 & 0 \\ 16.7 & 3.0 & 0 \\ 9.2 & 4.5 & 7.5 & 0 \\ 16.5 & 11.8 & 9.5 & 7.3 & 0 \\ 20.9 & 8.3 & 11.3 & 11.7 & 4.3 & 0 \\ 12.7 & 7.9 & 11.0 & 3.5 & 3.8 & 8.1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

然后,根据步骤 2,构造每个需求点 $i(i=1,2,\cdots n)$ 的需求序列 Q_i,如表 1 所示。

表 1　构造出的每个需求点的需求序列$(n=7,m=10)$

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
$Q_1(\lambda_1=0.39)$	1.5	1.3	0.5	0.9	0.7	0.8	1.6	0.3	1.0	0.8
$Q_2(\lambda_2=0.88)$	2.7	1.7	0.8	1.3	1.1	1.4	2.0	0.7	1.2	1.5
$Q_3(\lambda_3=0.77)$	4.0	1.7	2.1	1.3	1.2	2.9	4.9	1.1	2.5	2.3
$Q_4(\lambda_4=0.42)$	4.0	2.6	2.3	1.4	1.6	3.1	4.3	1.4	2.7	2.6
$Q_5(\lambda_5=0.38)$	4.3	2.8	2.4	1.6	1.6	3.3	4.3	1.4	2.8	2.7
$Q_6(\lambda_6=0.28)$	5.9	3.0	2.7	2.4	1.7	4.3	4.5	2.1	3.7	3.0
$Q_7(\lambda_7=0.85)$	6.1	4.4	3.0	3.5	3.0	5.1	5.2	2.4	6.1	3.1

根据步骤 3 中的选址方法,即通过(16)式的计算,得 $W_{k1}=\min(45.9,19.0,25.1,19.8,31.6,36.1,24.3)=19.0=W_2$,所以由随机模型进行选址的最佳配送中心的位置为 c_2。而用传统方法进行选址时,可在表 1 中任意选择一列作为各个需求点的初始需求量。由(1)式和(2)式可以很容易求出最佳配送中心的位置为 c_7。

最后,根据(17)式和(18)式,分别计算配送中心在 c_2 和 c_7 时,为完成表 1 给出的配送任务所用的总费用 $Tc1$ 和 $Tc0$。参照(19)式和表 1,可以求出

$$Tc1=\sum_{j=1}^{m=10}\sum_{i=1}^{n=7} d_{2i}q_{ij}=84.4 \tag{20}$$

$$Tc0=\sum_{j=1}^{m=10}\sum_{i=1}^{n=7} d_{7i}q_{ij}=111.9 \tag{21}$$

于是总费用比 $Tc0/Tc1=1.3$。

值得一提的是,由于整个模拟过程中有很强的随机性,所以即使是在相同的需求点个数(n)和相同的配送次数(m)的情况下,每次计算的最终结果也很有可能是不同的。但我们可以通过多次模拟,计算它们在平均意义下的统计结果。

4　结果与分析

根据 3 节所述,我们随机构建了不同规模大小、不同配送次数的配送网络,分别用随机数学模型和传统选址方法对其进行选址,并分别计算了它们的总费用。多次计算结果表明:随着配送网络规模不断增大,随机数学模型在费用的节省方面的优越性逐渐减弱,即随着需求点数目(n)的增加,费用比 $Tc0/Tc1$ 逐渐减小。而对于给定的配送网络(n 值一定),配送次数(m)的增加对费用 $Tc0/Tc1$ 比没有太大的影响。图 1-图 4 分别给出了 $n=7$, $n=10$, $n=20$ 和 $n=50$ 时, $Tc0/Tc1$ 随配送次数 m 的变化情况。

由于配送网络的产生和需求量都具有一定的随机性,所以计算的结果会在某一数值附近上下波动。但从其线性拟合的虚线(均值线)可以看出,随着 n 的增大, $Tc0/Tc1$ 逐渐减小;当 n 较小时$(n\le 10)$, $Tc0/Tc1$ 在 1.5 附近,这说明用随机模型进行选址,结果可以节省大约 30 %的费用;当 n 较大时$(n\ge 50)$, $Tc0/Tc1$ 接近于 1。而不论 n 取多大值, m 的变化对费用比没有明显影响。

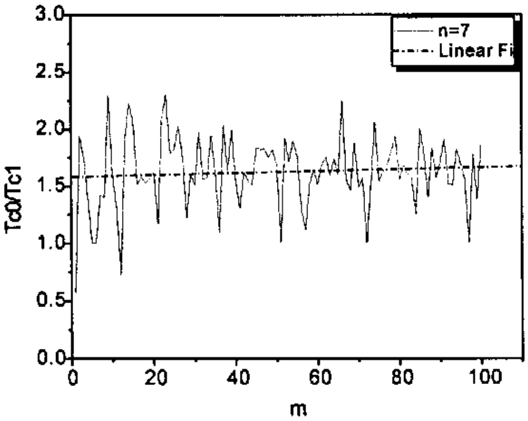

图 1 $n = 7$ 时费用比随配送次数的变化

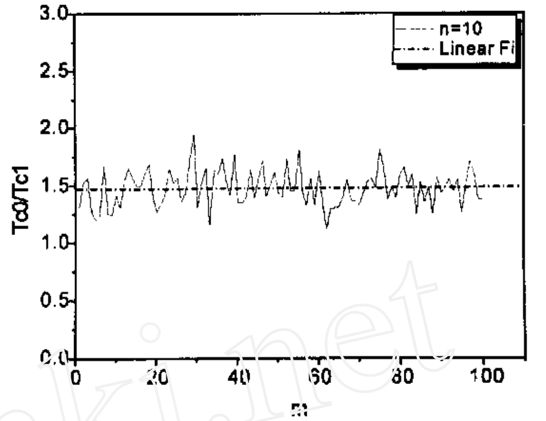

图 2 $n = 10$ 时费用比随配送次数的变化

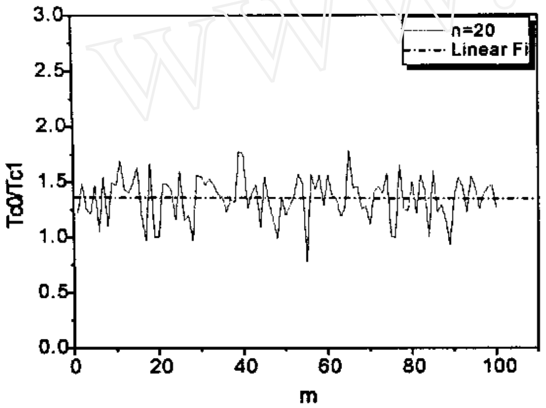

图 3 $n = 20$ 时费用比随配送次数的变化

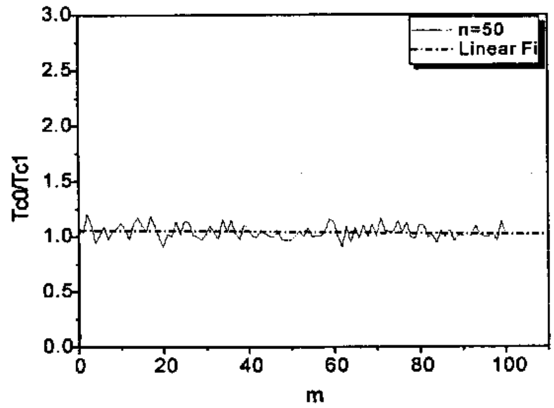

图 4 $n = 50$ 时费用比随配送次数的变化

参考文献:

[1] 杨波等.物流配送中心选址的随机数学模型[J].中国管理科学,2002,(10):57-61.

[2] 戴禾等.物流园区选址问题研究[M].北京:综合运输,2001(2).

[3] Bruns A, Klose A. An iterative heuristic for location-routing problems based on clustering[J]. Proceeding of the Second International Workshop on Distribution Logistics, The Netherlands, 1995,1-6.

[4] Bowersox D J, Closs D J. Logistical Management: The Integrated Supply Chain Process[M]. Mc Graw Hill, Inc., 1998.

[5] Tuzun D, Burke L I. A two-phase tabu search approach to the location routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 1999, (116):87-99.

[6] Hansen P H, Hegedahl B, Hjortkj ?r S, Obel B. A heuristic solution to the warehouse location-routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 1994, (76):111-127.

[7] Sheffiy. Urban Transportation Network: Equilibrium Analysis with Mathematical Progra-mming Methods[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.

[8] Kaas R, Dhaene J, Marc J G. Upper and lower bounds for sums of random variables[J]. Insurance Mathematics & Economics, 2000, (27): 151-168.

[9] Kaas R, Goovaerts M J, Dhaene J, Denuit M. Modern Actuarial Risk Theory[M]. Dordre-cht: Kluwer Acad. Publ, 2001.

[10] 黄克中,毛善培.随机方法与模糊数学应用[M].上海:同济大学出版社,1987.