第 21 卷第 3 期(总第 117 期)
2003 年 5 月

系 统 工 程
Systems Engineering

Vol 21, No. 3
May. , 2003

文章编号: 1001-4098(2003)03-0095-06

局内故障产品处理问题与竞争算法*

辛春林, 崔文田, 徐寅峰

(西安交通大学 管理学院, 陕西 西安 710049)

摘 要: 提出和研究局内故障产品处理问题。该问题是故障产品序列如何以局内方式(即在未知故障产品损坏程度的状况下)进行处理(返修还是报废), 使得处理故障产品的损失最小。设计解决该问题的竞争算法, 证明采用优先返修策略Ⅰ(PRRS Ⅰ), 竞争比为$\left(2-\frac{\lambda}{\gamma}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_1}$; 采用优先返修策略Ⅱ(PRRS Ⅱ), 竞争比为$\left(2-\frac{\lambda}{\eta+\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_1}$; 最后, 对局内故障产品处理问题的两种算法做出了比较并相应的给出了比较结果。

关键词: 局内问题; 故障产品; 返修优先策略; 竞争算法

中图分类号: C931.1 **文献标识码**: A

本文研究故障产品处理问题与竞争算法。

企业的质量目标是生产顾客满意的产品, 追求产品质量的零缺陷。但在企业实际生产中产品质量事故是在所难免的, 处理这些带有质量故障的产品(以下简称为故障产品), 一般来讲, 企业会把这些故障产品返修成合格产品, 再出售给顾客。但是如果故障产品存在的问题太大, 返修的成本太高, 这时就应该将故障产品报废。如果事先知道每件故障产品的损坏程度, 则决定该产品返修还是报废是显而易见的事。由于事先不知道每件故障产品的损坏程度, 所以就很难做出最优决策。以往的优化理论是建立在确定的已知条件的基础上来求出最优解, 但这种静态分析不能代表动态的现实情况, 实际上在某一条件下得出的最优解有可能是另一条件下的最劣解。我们把这种缺乏将来信息的问题称之为局内问题。

局内问题是依次接收输入, 在未知将来情况下, 每个输入相应地产生输出。竞争分析是局内竞争算法 A 与最优的局外算法 OPT 的比值。最优的局外算法是事先已知整个输入序列且能最优处理。任意给定一个输入序列 σ, 令 $C_A(\sigma)$ 和 $C_{OPT}(\sigma)$ 分别表示局内竞争算法 A 和最优的局外算法 OPT 对应的解, 若存在常数 α 和 β 且对所有序列 σ 满足

$$C_A(\sigma) \le \alpha\cdot C_{OPT}(\sigma) + \beta$$

则称竞争算法 A 具有 α 竞争比。若 $\beta=0$, 则称局内算法为严格的 α-competitive

在过去的十几年中, 局内问题和竞争算法已经吸引了人们浓厚的研究兴趣。人们通过比较局内算法与最优的局外算法来进行竞争分析, 竞争分析已经成功地应用于许多领域。在 20 世纪 80 年代后期 90 年代初期, 人们围绕着三个基本的局内问题展开研究, 即页面调度, k-服务问题和度量任务系统。除此以外, 在一些领域, 如数据结构、分布式数据管理、调度与负载平衡、行程安排、机器人技术、金融博弈、图论和计算机系统的许多方面, 该理论有着广阔的科研和应用前景。在国际上实际已经有很多这方面的研究成果[1-7], 目前国内也在积极探索这方面的研究[8-11]。

* **收稿日期**: 2002-11-24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(B 类 70028102)
作者简介: 辛春林, 男, 西安交通大学管理学院研究生; 崔文田, 男, 西安交通大学管理学院管理科学系副教授; 徐寅峰, 男, 西安交通大学管理学院管理科学系主任, 教授, 博士生导师。

1 故障产品处理问题

(1) 问题的描述

故障产品处理问题的实际背景是一家加工型企业生产出一批不合格零件 $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$, 这些不合格零件经过返修可以成为合格零件。如果返修成本过高, 大于生产成本, 返修就是一种得不偿失的策略。如果这些不合格零件存在的问题不大, 报废实在又太可惜了。因此, 公司要决策这些故障产品到底是返修还是报废。在本文中讨论的零件均指不合格零件。

假设返修不合格零件是在一条零件返修流水生产线上, 零件返修流水线有 n 道工序 $t=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$, 零件在每道工序的返修成本都不同。为研究方便起见, 可以简化为以 n 个顶点代表 n 道工序, 顶点序列为 $(1, 2, \cdots, n)$, 相应的返修成本序列为 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, 令 $\gamma=\sum_{l=1}^{n}\omega_l$, γ 表示 n 道工序的返修成本之和。

考虑到以下两个问题:

①如果事先已知零件序列 σ 中每个零件的损坏情况, 选择返修还是报废, 处理该零件序列的总损失为多少?

②如果事先未知零件序列 σ 中每个零件的损坏情况, 又该如何处理, 总损失为多少?

不合格零件处理问题优化的目标是在未知每件零件的损坏情况的前提下零件何时应返修、何时该报废, 使处理零件序列的总损失最少。问题①是局外问题(off-line), 由于已知不合格零件序列损坏情况的全部信息, 所以很容易找出损失最小的最佳决策。问题②是局内问题(on-line), 由于每次给定的零件序列都很可能不同, 每一时刻又仅能知道已返修的零件损坏的信息, 而无法知道未返修的零件损坏的信息, 这种只知道零件序列损坏的部分信息, 未知全部信息的性质, 就是该问题的局内性。而正是由于该问题为局内问题, 使得想要找出零件序列的总损失最小的最佳决策变得很困难。事实上, 零件序列的变化会对优化方案产生致命的影响。

(2) 局内故障产品处理问题的基本假设

在本文中用 C_{SR} 代表局内单个零件的返修成本, C_{TR} 代表局内零件序列的返修成本。

本文所有讨论都基于以下五个基本假设:

①假设每件零件的报废损失 λ 等于每件零件的生产成本 d 与每件零件的报废成本 e 之和, 即 $\lambda=d+e$;

②任何一件不合格零件经过返修流水线的 n 道工序都能加工成为合格零件下线;

③在未排除故障之前, 零件在返修流水线上每经过一个顶点 i 累加返修成本 ω_l, 如果在某道工序排除了故障, 则该产品成为合格品在该道工序下线, 例如零件在返修流水上的顶点 i 排除了故障, 则 $C_{SR}=\sum_{l=1}^{n}\omega_l$;

④在返修流水线上, 每件零件在每道工序的返修成本小于报废损失 λ, 即 $\omega_l<\lambda$, 其中 $l=1, 2, \cdots, n$;

⑤在返修流水线上, 每件零件经过 n 道工序的返修成本大于其报废损失 λ, 即 $\sum_{l=1}^{n}\omega_l>\lambda$

2 返修优先策略 Ⅰ: Preferential Return-Repair Strategy Ⅰ (PRRS Ⅰ)

先选择返修零件序列 σ, 如果零件序列中前 p 件零件累积的返修成本大于等于将该序列的 k 件零件全部报废所带来的损失时(即 $\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)}\geq k\lambda$), 将剩余未返修的 q 件零件全部报废。

返修优先策略 Ⅰ 的主导思想是:

首先, 一般而言, 返修某一零件的成本小于报废该零件带来的损失。其次由假设④可知, 在返修流水线上每件零件在每道工序的返修成本小于报废损失, 即 $\omega_l<\lambda$, 其中 $l=1, 2, \cdots, n$. 因此, 我们可以设想如果每件零件在前几道工序就返修完毕下线且返修成本小于报废损失和, 则该零件序列的返修成本和就小于报废损失和, 返修就是明智之举。

由于不知道整个零件序列的损坏程度, 因此, 我们通过先选择返修零件序列 σ, 来测试该零件序列的损坏程度。如果零件序列中前 p 件零件累积的返修成本大于等于将该序列的 k 件零件全部报废所带来的损失时(即 $\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)}\geq k\lambda$), 我们就了解到该序列前 p 个零件的损坏情况, 即返修并不合适, 此时对应的策略是立即停止返

修, 将剩余的未返修 q 件零件全部报废。

引理 1　令 $C_{OPO}(\sigma)$ 表示完成零件序列 σ 服务的局外最优成本, 则对于任意序列 σ 局外零件处理问题的最优解为

$$C_{OPT}(\sigma) \geq k \cdot \omega_1$$

证明　由假设④可知, 当某件零件选择返修时在返修流水线上的第一道工序完成返修, 返修成本 ω_1 小于报废该零件的损失 λ, 同时肯定小于此零件经过 j 道工序的返修成本 $\sum_{l=1}^{n} \omega_l$。因此, 显而易见, 当序列 σ 中的零件都在第一道工序返修下线所造成的损失最小。证毕。

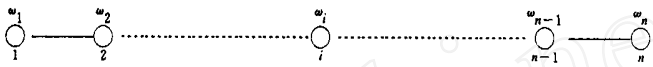

图 1　返修流水线的数学模型

如图 1, 考虑返修流水线的一般数学模型, 运用返修优先策略 I 可得以下结论。

定理 1　对于局内不合格零件处理问题, 返修优先策略 I 是具有竞争比为 $\left(2-\frac{\lambda}{\gamma}\right) \cdot \frac{\lambda}{\omega_1}$ 的竞争算法。

证明　考虑到局内返修流水线问题的一般模型, 假设 $C_{OPT}(\sigma)$ 表示完成零件序列 σ 服务的局外最优成本, C_A 表示同样序列的局内成本。$\omega_{(l,j)}$ 表示第 j 件零件在第 l 道工序的返修成本。

局内算法 A 的解分为两部分:

①如果局内当事人选择对零件进行返修处理, 该零件序列的返修成本为

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{j_i} \omega_{(l,j)}, \quad j_i \text{ 表示在第 } j \text{ 件零件在 } j_i \text{ 道工序完成返修}$$

此时, 可以假设有一个对手, 其尽可能将零件的处理成本最大。显然, 当零件序列中的每件零件都是一直到最后一道工序才返修完毕时, 该序列的处理成本为最大, 即

$$\max(C_{TR}) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} \omega_{(l,j)} = k \sum_{l=1}^{n} \omega_l$$

②如果局内当事人选择对零件进行报废处理, 该零件序列的报废所造成的损失为

$$k\lambda$$

此时, 可以假设有一个对手, 其尽可能将零件的返修成本最小, 使得报废损失远远大于返修损失, 报废处理的方式变得不合适。显然, 当零件序列中的每件零件在第一道工序就返修完毕时, 该零件序列的返修成本损失为最小, 报废变得十分不经济, 即

$$\min(C_{TR}) = k\omega_1 = k\lambda$$

假设零件序列中前 p 件零件选择返修, 剩余未返修的 q 件零件选择报废。由返修优先策略可知, 当累计的返修成本大于等于该零件序列全部报废所造成的损失时, 则该序列剩余的零件选择全部报废。即

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{j_i} \omega_{(l,j)} \geq k\lambda$$

此时, 对手选择使零件的返修成本最大的策略, 即每个零件在返修流水线的最后一道工序才返修完毕合格下线。可得如下结果:

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} \omega_{(l,j)} \geq k\lambda$$

代入在返修流水线上返修的零件数 p, 可得

$$p \geq \frac{k\lambda}{\gamma}$$

已知 $p + q = k$, 取 $p^* = \min(P_{(\sigma)}) = \frac{k\lambda}{\gamma}$, 可得 $q^* = \max(q_{(\sigma)}) = k - \frac{k\lambda}{\gamma}$。

由上可得局内故障处理问题的竞争算法 A 的解:

$$\begin{aligned} C_A(\sigma) &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + q\lambda \\ &= \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + \sum_{l=1}^{j_i}\omega_l + q\lambda \\ &\le k\lambda + \gamma + q^*\lambda \\ &= \left(2 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)\cdot k\cdot\lambda + \gamma \end{aligned}$$

即

$$C_A(\sigma) \le \left(2 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_l}C_{OPT}(\sigma) + \frac{\gamma}{k\omega_l}$$

证毕。

3 返修优先策略Ⅱ: Preferential Return-Repair Strategy Ⅱ(PRRS Ⅱ)

先选择返修零件序列 σ,在返修过程中如果某一零件的返修成本超过报废该零件的损失(假设在第 m 道工序)时,则该零件停止返修选择报废,继续返修下一个零件; 如果零件序列中前 p 件零件累积的返修成本与报废损失和大于等于将该序列的 k 件零件全部报废所带来的损失时(即 $\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + g\lambda \ge k\lambda$, g 为 p 件零件中经返修后还需报废的零件数),将剩余未返修的 q 件零件全部报废。

返修优先策略Ⅱ考虑到了人们的一般心理和零件超过第 m 道工序的返修合不合适的问题。

返修优先策略Ⅱ的主导思想是:

首先,一般而言,一件零件如果经过 m 道工序的返修,其返修成本超过报废该零件的损失时,尽管此时报废的损失更大,由于人的有限理性,人们很有可能放弃返修而采取报废的策略。其次,当某一零件的返修成本超过报废该零件的损失时,继续返修的成本有可能低于或高于此时总的报废损失,如果继续返修的返修成本超过此时总的报废损失,则此时还不如将该零件报废。

定理 2 对于局内不合格零件处理问题,返修优先策略Ⅱ是具有竞争比为 $\left(2 - \frac{\lambda}{\eta + \lambda}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_l}$ 的竞争算法。

证明 假设 $C_{OPT}(\sigma)$ 表示完成零件序列 σ 服务的局外最优成本,$C_B(\sigma)$ 表示同样序列的局内成本。$\omega_{(l,j)}$ 表示第 j 件零件在第 l 道工序的返修成本。

由返修优先策略Ⅱ可知,当某一零件的返修成本超过报废该零件的损失(即 $\sum_{l=1}^{m}\omega_l \ge \lambda$)时,则该零件停止返修选择报废,令 $\eta = \sum_{l=1}^{m}\omega_l$

局内算法 A 的解分为两部分:

①如果局内当事人选择对零件进行返修处理,该零件序列采取返修策略的损失:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + g\lambda$$

j_i 表示在第 j 件零件在 j_i 道工序完成返修任务,$g\lambda$ 表示有 g 件零件先经过 m 道工序的返修然后才报废的报废损失。

显然,当零件序列中的每件零件都是一直到第 m 工序才发现返修成本超过了报废损失然后采取报废策略时,该序列的处理成本为最大,即

$$\max(C_{TR}) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\omega_{(l,j)} + k\lambda = k\left(\sum_{l=1}^{m}\omega_l + \lambda\right)$$

②如果局内当事人选择对零件进行报废处理,该零件序列的报废所造成的损失为

$$k\lambda$$

显然,当零件序列中的每件零件在第一道工序就返修完毕时,该零件序列的返修成本损失为最小,报废变得十分不经济,即

$$\min(C_{TR}) = k\omega_1 \le k\lambda$$

假设零件序列中前 p 件零件选择返修, 剩余未返修的 q 件零件选择报废。由返修优先策略Ⅱ可知, 当前 p 件零件累计的返修成本与报废损失和大于等于该零件序列全部报废所造成的损失时, 则该序列剩余的零件选择全部报废。即

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + g\lambda \ge k\lambda,\quad g \le p,\ j_i \le m$$

此时, 对手选择使零件的返修成本最大的策略, 即每个零件在返修流水线的第 m 道工序才发现返修成本超过报废损失而采取报废策略时。可得如下结果:

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{m}\omega_{(l,j)} + p\lambda \ge k\lambda$$

代入在返修流水线上经过返修的零件数 p, 可得

$$p \ge \frac{k\lambda}{\eta+\gamma}$$

已知 $p+q=k$, 取 $p^* = \min(P_{(\sigma)}) = \frac{k\lambda}{\eta+\gamma}$, 可得 $q^* = \max(q_{(\sigma)}) = k - \frac{k\lambda}{\eta+\gamma}$。

由上分析可得局内故障处理问题的竞争算法B 的解:

$$\begin{aligned} C_B(\sigma) &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + g\lambda + q\lambda \\ &= \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{j_i}\omega_{(l,j)} + g\lambda + \sum_{l=1}^{j_i}\omega_l + q\lambda \\ &\le k\lambda + \eta + \left(k - \frac{k\lambda}{\eta+\gamma}\right)\lambda \\ &= \left(2 - \frac{\lambda}{\eta+\gamma}\right)\cdot k\cdot\lambda + \eta \end{aligned}$$

即

$$C_B(\sigma) \le \left(2 - \frac{\lambda}{\eta+\gamma}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_1}C_{OPT}(\sigma) + \frac{\eta}{k\omega_1}$$

证毕。

4　两种竞争算法的比较

在第2节和第3节中我们分别给出了局内故障产品处理问题的两个策略A 和B, 这两种策略哪种更优呢? 直观看来, 当输入的故障产品序列的损坏程度均较轻时, 两种策略的效果是等同的; 若损坏程度较轻的在故障产品序列的前面, 则宜采用策略A. 从竞争比来看, 由于A 和B 的竞争比分别为:

$$\alpha_A = \left(2 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_1}$$

$$\alpha_B = \left(2 - \frac{\lambda}{\eta+\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda}{\omega_1}$$

当 $\gamma < \eta + \lambda$ 时, 算法A 比算法B 竞争比小; 反之, 算法A 比算法B 竞争比大。

显然, 我们可以得出以下结论:

定理3　对于局内故障产品处理问题在算法的竞争比方面, 当 $\gamma < \eta + \lambda$ 时, 算法A 比算法B 更优; 反之, 当 $\gamma > \eta + \lambda$ 时, 算法B 比算法A 更优。

5　结束语

本文所讨论的局内故障产品处理问题假设产品序列的每件产品都是故障产品, 实际生活中可能有部分为合格产品, 有部分为不合格产品; 每件故障产品经过返修后都能成为合格产品, 实际生活中有可能是某些故障经过返修后部分功能丧失不能成为合格产品或为致命的故障返修后还得报废; 产品报废后还有部分残值等等。我们又该如何求解此类问题, 这有待深入加以研究。

局内故障处理问题与竞争算法的研究给我们研究许多实际局内问题提供了新的思路, 在解决动态复杂的社会

经济管理问题, 可以运用此类方法进行有益的探索和尝试。

参考文献:

[1] Graham R L. Bounds for certain multiprocessing anomalies[J]. Bell System Technical Journal, 1966, 45: 1563~1581.

[2] Karlin A, Manasse M, Rudolph L, Sleator D D. Competitive snoopy caching[J]. Algorithmica, 1988, 3: 79~119.

[3] Manasse M S, McGeoch L A, Sleator D D. Competitive algorithms for server problems[J]. Journal of Algorithms, 1990, (11): 208~230.

[4] Borodin A, Linial N, Saks M. An optimal on-line algorithm for metrical task systems[J]. Journal of the ACM, 1992, 39: 745~763.

[5] New Algorithms for an Ancient Scheduling Problem[A]. Proceedings of the 24th ACM symposium on Theory of Computing[C]. Victoria, Canada, 1992: 54~58.

[6] BenDavid S, borodin A. A new measure for the study of the on-line algorithm[J]. Algorithmca, 1994, (11): 73~91.

[7] Koutsoupias E, Papadimitriou C. On the k-servicer conjecture[J], STOC., 1994: 507~511.

[8] 堵丁柱. k 车服务问题与竞争算法[J]. 数学的实践与认识, 1991, (4): 36~40.

[9] 徐寅峰, 王刊良. 局内出租车调度与竞争算法[J]. 西安交通大学学报, 1997, (1): 56~61.

[10] 马卫民, 王刊良. 局内管理问题及其竞争策略论[J]. 管理科学学报, 已接受.

[11] Ma W M, XU Y F, Wang K L. On-line k-truck problem and its competitive algorithm[J]. Journal of Global Optimization, 2001, 21(1): 15~25.

On-Line Problem of Dealing with Accident Products and Its Competitive Algorithms

XIN Chun-lin, CUI Wen-tian, XU Yin-feng
(School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: In this paper, we propose and study the problem of dealing with accident product. And the goal is to decide how to cope with the problem products in an on-line way, namely, without knowing to what extent the product is damaged. And then two competitive strategies, Preferential Return-Repair Strategy Ⅰ(PRRS Ⅰ) and Preferential Return-Repair Strategy Ⅱ(PRRS Ⅱ) have been given, and their competitive ratios obtained. Finally, two alternative competitive algorithms for this problem are compared.

Key words: On-Line Problem; Accident Products; Preferential Return-Repair Strategy; Competitive Algorithm