基于广义 Fuzzy 偏好关系的决策方法探讨①

董玉成[1], 徐寅峰[1,2], 王 扬[1]
(1. 西安交通大学管理学院, 陕西 西安 710049;
2. 机械制造系统工程国家重点实验室, 陕西 西安 710049)

摘要: 提出了广义模糊偏好关系的概念. 设计了互补化排序和加性一致化排序两种排序方法,讨论了两种排序方法的相关性质. 基于这两种排序方法,定义了冗余一致性指标和加性一致性指标,并讨论了采用加权算术平均算子(WAA 算子)或有序加权平均算子(OWA 算子)对广义模糊偏好关系进行集结,其群体偏好一致性(包括冗余一致性和加性一致性)的相关性质. 对进一步完善基于模糊偏好关系的群决策模型具有理论和现实意义.

关键词: 广义模糊偏好关系; 排序方法; 冗余一致; 加性一致; 信息集成算子
中图分类号: C934 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-578(2008)03-0282-07

Study of decision making method using generalized fuzzy preference relations

DONG Yu-cheng[1], XU Yin-feng[1,2], WANG Yang[1]
(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;)
2. State Key Lab. for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an 710049, China)

Abstract: This paper first presents a concept of generalized fuzzy preference relations and designs two methods to obtain the priorities vector from them. Moreover, the related properties of these two priority methods are discussed. Then the redundancy consistency and the additive consistency are defined based on the two methods. At last, some results on redundancy consistency and the additive consistency of the collective preference relation aggregated by weighted arithmetic averaging operator or ordered weighted averaging operator are given. These results are very important for group decision model with fuzzy preference relations.

Key words: generalized fuzzy preference relations; priority method; redundancy consistency; additive consistency; information aggregation operator

0 引 言

偏好关系又称判断矩阵,在多属性决策中被广泛研究. 模糊互补偏好关系是最常见的偏好关系[1~8]. 当决策者在某准则下对 n 个方案进行两两比较构造一个典型的模糊互补偏好关系时,一

① 收稿日期: 2006-06-19; 修订日期: 2007-05-21.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70525004; 70121001; 60736027).

般需要经过 $n(n-1)/2$ 次判断. 然而决策者有时可能对某些比较判断缺少把握或不想发表意见，这样就会使偏好关系中的某些项出现空缺，对这类偏好关系一般称为残缺互补偏好关系[8,9]. 另一方面，决策者也可能作出多达 n^2 次比较判断，这样就出现了冗余判断，使模糊互补偏好关系失去互补性，本文称这种偏好关系为广义模糊偏好关系. 这一新概念引入是基于如下理由.

1）有些学者[10,11] 在 AHP 的研究中，认为放弃乘性偏好关系的互反性是合理的，比如在一场球赛中，球队 A 击败了球队 B，但是球队 B 同样可以击败球队 A，这种情形在现实生活中的成对比较判断里很常见. 这些研究和分析也完全适合模糊互补偏好关系，它为引入广义模糊偏好关系提供了理论支持.

2）在采用一些最常见信息集成算子对模糊互补偏好关系进行集成时，无法保证集成的群体偏好关系的互补性. 比如采用有序加权平均算子（OWA）[12] 对模糊互补偏好关系进行集成后，无法保证集成的群体偏好关系是互补的[13]. 因此，讨论从广义模糊偏好关系中发展权向量就有了必要性，而这些排序方法也能应用于 Chiclana 等[13~16] 提出的模糊多人决策模型.

本文的主要目的是对基于广义模糊偏好关系的决策方法进行探讨. 给出了广义模糊偏好关系排序的两种方法；定义了广义模糊偏好关系的冗余一致性和加性一致性，并采用加权算术平均算子（WAA）或有序加权平均算子（OWA）对广义模糊偏好关系进行集成，分析其群体偏好一致性（包括冗余一致性和加性一致性）的相关性质.

1　广义模糊偏好关系排序方法

1.1　广义模糊偏好关系的互补化排序

为了叙述方便先给出以下几个定义.

定义 1　令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一矩阵，若对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$ 有 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为模糊矩阵[17]，亦称为广义模糊偏好关系.

定义 2　令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一矩阵，若对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$ 有 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$，$a_{ij}+a_{ji}=1$ 则称 $\boldsymbol{A}$ 为模糊互补偏好关系[6,7].

令 M_n^1 是 n 阶广义模糊偏好关系集合，M_n^2 是 n 阶模糊互补偏好关系集合，由定义知 $M_n^2\subset M_n^1$. 为了通过广义模糊偏好关系对方案进行排序，从中发展权向量，一个直观的方法是采用模糊互补偏好关系去贴近广义模糊偏好关系，然后借助有关模糊互补偏好关系的排序方法[6~8]，最终获取权向量. 本文采用欧氏距离定义矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$ 的贴近程度，即：$d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij})^2}$，这种方法可归纳为寻找一最贴近的模糊互补偏好关系. 数学模型如下.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n^1$，$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times n}\in M_n^2$. 令

$$f(\boldsymbol{X}^*)=\min_{X\in M_n^2}d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})=\min_{X\in M_n^2}\left(\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-x_{ij})^2}\right)\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{X}^*$ 即为 $\boldsymbol{A}$ 最贴近模糊互补偏好关系.

通过模糊互补偏好关系的排序方法[6~8]（本文采用最小方差法，具体见文献[7]）对 $\boldsymbol{X}^*$ 进行排序，其排序向量可以近似作为 $\boldsymbol{A}$ 的排序向量.

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n^1$，$\boldsymbol{X}^*=(x_{ij}^*)_{n\times n}\in M_n^2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 最贴近模糊互补偏好关系，那么 $x_{ij}^*=(a_{ij}+1-a_{ji})/2$.

证明　1）等价如下优化问题

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{X}^*)=\underset{x_{ij}}{\mathrm{Min}}\dfrac{1}{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}((a_{ij}-x_{ij})^2+(a_{ji}-x_{ji})^2)+\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}-x_{ii})^2\right)^{1/2}\\ \text{s.t.}\quad x_{ij}+x_{ji}=1;\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant 1;\\ \qquad i,j=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{2}$$

式(2)等价于式(3).

$$f(\boldsymbol{X}^*)=\underset{x_{ij}}{\mathrm{Min}}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}((a_{ij}-x_{ij})^2+(a_{ji}-1+x_{ij})^2)+\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}-\frac{1}{2})^2\tag{3}$$

令 $\partial f/\partial x_{ij}=0$，得

$$-(a_{ij}-x_{ij}^*)+(a_{ji}-1+x_{ij}^*)=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

化简得

$$x_{ij}^*=(a_{ij}+1-a_{ji})/2\tag{4}$$

证毕.

令 $Q_n = \{ \boldsymbol{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n)^{\mathrm{T}} | \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \geqslant 0 \}$，令 $\boldsymbol{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n)^{\mathrm{T}} \in Q_n$ 为采用最小方差法排序公式[7] 对 $\boldsymbol{X}^*$ 进行排序的权向量，那么

$$w_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* + 1 - \frac{n}{2} \right) \tag{5}$$

把式(4) 代入式(5) 得

$$w_i = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + 1 - a_{ji}) + 1 - \frac{n}{2} \right) \tag{6}$$

证毕.

把 $\boldsymbol{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n)^{\mathrm{T}}$ 近似作为 $\boldsymbol{A}$ 的排序权向量，称该排序方法为广义模糊偏好关系互补化排序.

1.2 广义模糊偏好关系的加性一致化排序

定义 3 令 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一模糊互补偏好关系，若对任意 $i,j = 1,2,\cdots,n$ 有 $a_{ij} = a_{ik} - a_{jk} + 0.5$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是加性一致模糊互补偏好关系.

令 M_n^3 是 n 阶加性一致模糊互补偏好关系集合，由定义知 $M_n^3 \subset M_n^2 \subset M_n^1$. 在这一节，考虑通过寻找一个最贴近广义模糊偏好关系的加性一致模糊互补偏好关系，从而直接获取权向量.

数学模型如下：设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n^1, \boldsymbol{Y} = (y_{ij})_{n\times n} \in M_n^3$，令

$$f(\boldsymbol{Y}^*) = \min_{Y \in M_n^3} d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{Y}) = \min_{Y \in M_n^3}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - y_{ij})^2 \right)^{1/2} \right) \tag{7}$$

称 $\boldsymbol{Y}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最贴近加性一致模糊互补偏好关系. 令

$$Q_n = \{ \boldsymbol{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n)^{\mathrm{T}} | \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i \geqslant 0 \}$$

记 $\boldsymbol{w} = (w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n)^{\mathrm{T}} \in Q_n$ 为 $\boldsymbol{Y}$ 对应的权向量. 因为 $\boldsymbol{Y}$ 是模糊加性一致偏好关系，有[6-8]

$$y_{ij} = w_i - w_j + 0.5 \tag{8}$$

将式(8) 代入式(7) 有

$$f(\boldsymbol{w}^*) = \min_{w \in Q_n}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - (w_i - w_j + 0.5))^2 \right)^{1/2} \right) \tag{9}$$

称 $\boldsymbol{w}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的排序向量.

定理2 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n^1$. $\boldsymbol{Y} = (y_{ij}^*)_{n\times n} \in M_n^3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最贴近模糊互补偏好关系，$\boldsymbol{w}^* = (w_1^* \quad w_2^* \quad \cdots \quad w_n^*)^{\mathrm{T}} \in Q_n$ 为采用加性一致化排序方法获取的权向量，那么

$$y_{ij}^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - a_{jk}) + \frac{n}{2} \right)$$

$$w_i^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$$

证明 式(9) 与优化问题(10) 等价.

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{w}) = \min_{w \in Q} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - (w_i - w_j + 0.5))^2 \\ \text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \end{cases} \tag{10}$$

$w_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n$

构造拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{w},\lambda) = f(\boldsymbol{w}) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right)$，令 $\partial L/\partial w_i = 0, \partial L/\partial \lambda = 0$ 得

$$\lambda - \sum_{j=1}^{n} 2(a_{ij} - (w_i^* - w_j^* + 0.5)) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^* - 1 = 0 \tag{12}$$

联立式(11)，(12) 得

$$w_i^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \tag{13}$$

联立式(8)，(13) 得

$$y_{ij}^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - a_{jk}) + \frac{n}{2} \right) \tag{14}$$

证毕.

2 进一步讨论

2.1 两种排序方法的相关性质

一种广义模糊偏好关系的排序方法可以看作由 M_n^1 到 Q_n 的一个映射，记为 $\boldsymbol{w} = \Gamma(\boldsymbol{A})$. 并称 $\boldsymbol{w}$ 是广义模糊偏好关系 $\boldsymbol{A}$ 的排序向量. 下面讨论两种排序方法的一些性质.

定理 3 当 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是模糊互补偏好关系(即 $\boldsymbol{A} \in M_n^2$) 时，本文两种排序方法(式(6) 和式(13)) 等价于模糊互补偏好关系排序的最小方差法.

证明 因为 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n^2$，所以 $a_{ij} =$

$1-a_{ji}$，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\frac{n^2}{2}$，把这两式分别代入式(6)和(13)，都可得 $w_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+1-\frac{n}{2}\right)$，即为模糊互补偏好关系的最小方差法排序公式.　　证毕.

定义 4　一种排序方法称为强条件下保序的，如果对任意 $k=1,2,\cdots,m$，有 $a_{ik}\geqslant a_{jk}$ 和 $a_{ki}\leqslant a_{kj}$，则 $w_i\geqslant w_j$，且当前者所有等式成立时，有 $w_i=w_j$.

定义 4 推广了模糊互补偏好关系强条件保序的概念. 下面将证明两种排序方法是强条件保序的.

定理 4　广义模糊偏好关系互补化排序方法（式(6)）和加性一致化排序方法（式(13)）是强条件下保序的.

证明　对任意 $k=1,2,\cdots,m$，有 $a_{ik}\geqslant a_{jk}$ 和 $a_{ki}\leqslant a_{kj}$，将其代入式(6)或者式(13)，有 $w_i\geqslant w_j$，且当前者所有等式成立时，有 $w_i=w_j$.　　证毕.

类似模糊互补偏好关系，定义广义模糊偏好关系排序方法的置换不变性.

定义 5　设 $\Gamma(\cdot)$ 是一种排序方法，$\boldsymbol{A}$ 是任一个给定的广义模糊偏好关系，记 $\boldsymbol{A}$ 的排序权向量为 $\boldsymbol{w}=\Gamma(\boldsymbol{A})$. 如果对于任一置换不变矩阵 $\boldsymbol{P}$，均有 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}=\Gamma(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，则称这种排序方法是置换不变的.

定理 5　广义模糊偏好关系互补化排序（式(6)）和加性一致化排序（式(13)）是置换不变的.

证明　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n^1$，且设 $\boldsymbol{P}$ 是置换不变矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{w}=(w_1\ \ w_2\ \ \cdots\ \ w_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}=(v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在式(6)下的排序向量，经置换后，$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行成了 $\boldsymbol{B}$ 的第 l 行，$\boldsymbol{A}$ 的第 i 列成了 $\boldsymbol{B}$ 的第 l 列，因此

$$w_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}+1-a_{ji}}{2}\right)+1-\frac{n}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{lj}+1-b_{jl}}{2}\right)+1-\frac{n}{2}\right)=v_l$$

类似若 $\boldsymbol{w}=(w_1\ \ w_2\ \ \cdots\ \ w_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}=(v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在式(9)下的排序向量，则有

$$w_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}+1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}b_{lj}+1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\right)=v_l$$

所以两种排序方法具有置换不变性.　　证毕.

2.2　群决策与一致性

偏好关系一致性测量一般包括两个问题[3]：1）什么时候决策者提供的个体偏好关系是一致的；2）什么时候，一群人提供的偏好关系是一致的. 对于第 2）个问题一般讨论两个方面：(a) 群体偏好关系的一致性[13,18,19]；(b) 群体决策的共识测量[20]. 基于本文两种排序方法，给出广义模糊偏好关系的冗余一致性指标 RCA($\boldsymbol{A}$) 和加性一致性指标（JCI($\boldsymbol{A}$)）（见定义 6）. 基于这些一致性指标，集中讨论一致性测量的第 2）个问题的第 (a) 方面（广义模糊偏好关系一致性测量的其它相关问题在今后的研究中讨论），即采用 WAA 算子和 OWA 算子对广义模糊偏好关系进行群集成后群体偏好关系的一致性问题. 关于无冗余判断的乘性偏好关系和模糊互补偏好关系的群体一致性问题，文献[13,18,19]作过一些讨论，本节研究可以认为是这些讨论的继续.

定义 6　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n^1$. 定义 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A})=\underset{\boldsymbol{X}\in M_n^2}{\mathrm{Min}}\,d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的冗余一致性指标. 定义 $\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A})=\underset{\boldsymbol{Y}\in M_n^3}{\mathrm{Min}}\,d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{Y})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的加性一致性指标.

由互补化排序方法原理（式(4)）可知

$$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A})=\underset{\boldsymbol{X}\in M_n^2}{\mathrm{Min}}\,d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{1}{2}(a_{ij}+1-a_{ji})\right)^2\right)^{1/2}$$
$$=\frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}+a_{ji}-1)^2\right)^{1/2}\tag{15}$$

由加性一致化排序方法原理（式(14)）可知

$$\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A})=\min_{\boldsymbol{Y}\in M_N^3}d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{Y})$$
$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}-\sum_{k=1}^{n}a_{jk}+\frac{n}{2}\right)\right)^2\right)^{1/2}\tag{16}$$

显然 RCI($\boldsymbol{A}$) 越大，则 $\boldsymbol{A}$ 中冗余判断越多，当 RCI($\boldsymbol{A}$) $=0$，则认为 $\boldsymbol{A}$ 是冗余一致的（即是模糊互补偏好关系）. 同样 JCI($\boldsymbol{A}$) 越大，则 $\boldsymbol{A}$ 加性一致性越差，当 JCI($\boldsymbol{A}$) $=0$，则认为 $\boldsymbol{A}$ 是加性一致的（即是加性一致模糊互补偏好关系）. 可以分别为 RCI($\boldsymbol{A}$) 和 JCI($\boldsymbol{A}$) 设定临界值 $\overline{\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A})}$ 和

$\overline{\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A})}$. 当 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}) \leqslant \overline{\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A})}$ 则认为广义模糊偏好关系 $\boldsymbol{A}$ 是冗余一致可接受; 当 $\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}) \leqslant \overline{\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A})}$ 可认为 $\boldsymbol{A}$ 是加性一致可接受. 当 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}) \leqslant \overline{\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A})}$ 和 $\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}) \leqslant \overline{\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A})}$ 同时成立,则认为 $\boldsymbol{A}$ 是一致可接受,此时从 $\boldsymbol{A}$ 中发展的权向量才认为是可靠和有效的. 对临界值的设定,由 AHP 的一致性检验可以得到启示: 类似Saaty[21] 在AHP中使用的方法,可以通过使用平均随机一致性指标对一致性指标标准化,然后经验性的去设定临界值; 也可以类似采用 Jong[22] 的统计方法,把临界值设定归结为 χ^2 检验.

1) 用 WAA 算子进行群决策

设 $\boldsymbol{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n}, k = 1,2,\cdots,m$ 为决策者给出的 m 个广义模糊偏好关系. 采用加权算术平均算子(WAA 算子) 对 $\boldsymbol{A}^k$ 进行集成,得到群体模糊偏好关系记为 $\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{a_{ij}})_{n\times n}$. 其中 $\overline{a_{ij}} = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k a_{ij}^k)$, λ_k 为专家 k 的权重,且 $\lambda_k \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$.

定理6 设 $\boldsymbol{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n} \in M_n^1, k = 1,2,\cdots, m$. (a) 若 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^k) \leqslant \alpha (k = 1,2,\cdots,m)$,那么 $\mathrm{RCI}(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant \alpha$; (b) 若 $\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^k) \leqslant \beta (k = 1,2,\cdots, m)$,那么 $\mathrm{JCI}(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant \beta$.

证明 仅证明(a),(b) 可以完全类似证明. 因为 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^k) \leqslant \alpha$,所以

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^k + a_{ji}^k - 1)^2 \leqslant (2n\alpha)^2, \quad k = 1,2,\cdots,m \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{RCA}(\overline{\boldsymbol{A}}) &= \frac{1}{2n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{ji} - 1)^2 \Big)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k (a_{ij}^k + a_{ji}^k - 1) \Big)^2 \Big)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{m} \Big(\lambda_k^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^k + a_{ji}^k - 1)^2 \Big) + \\
&\quad 2\sum_{k<l}^{n} \Big(\lambda_k \lambda_l \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ((a_{ij}^k + a_{ji}^k - 1) \cdot (a_{ij}^l + a_{ji}^l - 1)) \Big) \Big)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{m} \Big(\lambda_k^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}^k + a_{ji}^k - 1)^2 \Big) + \\
&\quad \sum_{k<l}^{n} \Big(\lambda_k \lambda_l \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} ((a_{ij}^k + a_{ji}^k - 1)^2 + (a_{ij}^l + a_{ij}^l - 1)^2) \Big) \Big)^{1/2}
\end{aligned} \tag{18}$$

联立式(17) 和(18) 得

$$\mathrm{RCI}(\overline{\boldsymbol{A}}) \leqslant \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{m} (2\lambda_k n\alpha)^2 + 2\sum_{k<l}^{m} (\lambda_k \lambda_l (2n\alpha)^2) \Big)^{1/2} = \alpha \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \alpha \tag{19}$$

证毕.

从定理6 可得:采用 WAA 算子进行集成,若个体广义模糊偏好关系的一致性水平(包括冗余一致性和加性一致性) 都是可接受的,那么群体偏好必然是一致可接受的.

2) 用 OWA 算子进行群决策

采用有序加权算术平均算子(OWA 算子) 对 $\boldsymbol{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n}, k = 1,2,\cdots,m$ 进行集成,得到群体广义模糊偏好关系记为 $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = (\overline{\overline{a_{ij}}})_{n\times n}$,其中, $\overline{\overline{a_{ij}}} = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k b_{ij}^k)$,且 b_{ij}^k 为 $a_{ij}^k (k = 1,2,\cdots,m)$ 中第 k 大的元素. $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_m)^{\mathrm{T}}$ 为 OWA 算子相关联的加权向量,其中 $\lambda_k \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$.

定义7 设 $\boldsymbol{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n} (k = 1,2,\cdots), m$ 是一组广义模糊偏好关系,定义 $\boldsymbol{B}^k = (b_{ij}^k)_{n\times n}$ 为其第 k 次序广义模糊偏好关系.

定理7 设 $\boldsymbol{A}^k = (a_{ij}^k)_{n\times n} \in M_n^1, k = 1,2,\cdots, m$. (a) 若 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^k) \leqslant \alpha \ (k = 1,2,\cdots,m)$,那么 $\mathrm{RCI}\ (\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}) \leqslant \alpha$; (b) 若 $\mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^k) \leqslant \beta \ (k = 1,2,\cdots, m)$,那么 $\mathrm{JCI}\ (\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}) \leqslant \beta$.

定理7 可由定理6 和定义 7 可直接得证,证明略.

从定理 7 可知,采用 OWA 算子进行集成,若次序广义模糊偏好关系的一致性水平(包括冗余一致性和加性一致性) 都是可接受的,那么群体偏好必然是一致可接受的.

3 算 例

为了叙述方便,记 $\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{A})$ 分别为采用本文第一种排序方法(式(6)) 和第二种排序方法(式(13)) 从广义模糊偏好关系 $\boldsymbol{A}$ 中获取的权向量. 记 $\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}), \mathrm{JCI}(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的冗余一致性指标和加性一致性指标的值. 现考虑有两个决策者对四个方案进行评估,分别给出自己的广义模糊偏

好关系 $\boldsymbol{A}^1$, $\boldsymbol{A}^2$.

$$\boldsymbol{A}^1=\begin{pmatrix}0.5&0.6&0.8&0.9\\0.3&0.5&0.6&0.9\\0.3&0.3&0.5&0.7\\0.2&0.2&0.5&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0.4&0.7&0.7&0.9\\0.4&0.5&0.6&0.8\\0.3&0.4&0.5&0.6\\0.2&0.1&0.5&0.5\end{pmatrix}$$

按照本文方法计算出 $\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{A}^1)$,$\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{A}^1)$,$\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{A}^2)$,$\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{A}^2)$,$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^1)$,$\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^1)$,$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^2)$,$\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^2)$ 的值,具体结果如下.

$$\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{A}^1)=(0.4375\quad 0.3375\quad 0.1750\quad 0.0500)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{A}^1)=(0.4313\quad 0.3062\quad 0.1812\quad 0.0812)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{A}^2)=(0.4250\quad 0.3250\quad 0.1875\quad 0.0625)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{A}^2)=(0.4188\quad 0.3187\quad 0.1937\quad 0.0687)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^1)=0.0113,\ \mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^1)=0.0197$$

$$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^2)=0.0075,\ \mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^2)=0.0172$$

如按 WAA 算子对 $\boldsymbol{A}^1$,$\boldsymbol{A}^2$ 进行集成,设 $\lambda_1=\lambda_2=0.5$,得到群体偏好关系为 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 并计算出 $\mathrm{RCI}(\overline{\boldsymbol{A}})\mathrm{JCI}(\overline{\boldsymbol{A}})$ 可以看出

$$\mathrm{RCI}(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant\max(\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^1),\mathrm{RCI}(\boldsymbol{A}^2))$$

$$\mathrm{JCI}(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant\max(\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^1),\mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^2))$$

这与定理6相符合.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}0.45&0.65&0.75&0.90\\0.35&0.50&0.60&0.85\\0.30&0.35&0.50&0.65\\0.20&0.15&0.50&0.50\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{RCI}(\overline{\boldsymbol{A}})=0.0053,\ \mathrm{JCI}(\boldsymbol{A}^1)=0.0131$$

如按 OWA 算子对 $\boldsymbol{A}^1$,$\boldsymbol{A}^2$ 进行集成,不妨设 $\lambda_1=\lambda_2=0.5$,得到群体偏好关系为 $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$. $\boldsymbol{B}^1$,$\boldsymbol{B}^2$ 为 $\boldsymbol{A}^1$,$\boldsymbol{A}^2$ 的次序广义模糊偏好关系. 计算出 $\mathrm{RCI}(\overline{\overline{\boldsymbol{A}}})$,$\mathrm{JCI}(\overline{\overline{\boldsymbol{A}}})$,$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^1)$,$\mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^1)$,$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^2)$,$\mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^2)$ 的值. 可以看出

$$\mathrm{RCI}(\overline{\overline{\boldsymbol{A}}})\leqslant\max\{\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^1),\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^2)\}$$

$$\mathrm{JCI}(\overline{\overline{\boldsymbol{A}}})\leqslant\max\{\mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^1),\mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^2)\}$$

这与定理7相符合.

$$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}=\overline{\boldsymbol{A}},\ \boldsymbol{B}^1=\begin{pmatrix}0.4&0.6&0.7&0.9\\0.3&0.5&0.6&0.8\\0.3&0.3&0.5&0.6\\0.2&0.1&0.5&0.5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0.5&0.7&0.8&0.9\\0.4&0.5&0.6&0.9\\0.3&0.4&0.5&0.7\\0.2&0.2&0.5&0.5\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^1)=0.0088,\ \mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^1)=0.0200$$

$$\mathrm{RCI}(\boldsymbol{B}^2)=0.0100,\ \mathrm{JCI}(\boldsymbol{B}^2)=0.0163$$

4　结束语

本文主要做了如下工作：1)提出了广义模糊偏好关系的概念,并设计了互补化排序和加性一致化排序两种排序方法;2)讨论了两种排序方法的一些相关性质;3)给出了冗余一致性指标和加性一致性指标的公式,并讨论了采用加权算术平均算子(WAA 算子)和有序加权平均算子(OWA 算子)对广义模糊偏好关系进行集结,其群体偏好一致性(包括冗余一致性和加性一致性)的一些性质. 本文结果对完善基于模糊偏好关系的群决策模型具有理论和现实意义. 在今后的研究中,将进一步探讨这些问题.

参考文献:

[1]Orlorski S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 155—167.

[2]Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 117—131.

[3] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F, *et al* . Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154(1): 98—109.

[4]樊治平, 姜艳萍, 肖四汉. 模糊判断矩阵的一致性及其性质[J]. 控制与决策, 2001, 16(1): 69—71.

[5]Ma J, Fan Z P, Jiang Y P, *et al.* A method for repairing the inconsistency of fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(1): 20—33.

[6]樊治平，姜艳萍．模糊判断矩阵排序方法研究的综述[J]．系统工程，2001，19(5)：12—18.
[7]徐泽水．模糊互补判断矩阵排序的最小方差法[J]．系统工程理论与实践，2001，21(10)：93—96.
[8]徐泽水．不确定多属性决策方法及应用[M]．北京：清华大学出版社，2004.
[9]徐泽水．基于残缺互补判断矩阵的交互式群决策方法[J]．控制与决策，2005，20(8)：913—916.
[10]Koczkodaj W W, Orlowski M. An orthogonal basis for computing a consistent approximation to a pairwise comparisons matrix[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1997, 34(10): 41—47.
[11]Koczkodaj W W, Orlowski M. Computing a consistency approximation to generalized pairwise comparisons matrix[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(3): 79—85.
[12]Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 183—190.
[13]Chiclana F, Herreraa F, Herrera-Viedmaa E. A note on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 137(1): 71—83.
[14]Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 33—48.
[15]Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 277—291.
[16]Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. A note on the internal consistency of various preference representations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 131(1): 75—78.
[17]杨伦标，高英仪．模糊数学－理论及应用[M]．广州：华南理工大学出版社，1992.
[18]Xu Z S. On consistency of the weighted geometric mean complex judgement matrix in AHP[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 126(3): 683—687.
[19]Escobar M T, Aguarón J, Moreno-Jiménez J M. A note on AHP group consistency for the row geometric mean priorization procedure[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 153(2): 318—322.
[20]Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F. A Consensus model for multiperson decision making with different preference structures[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A, 2002, 32(3): 394—402.
[21]Saaty T L. The Analytic Hierarchy Process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.
[22]Jong P. A statistical approach to Saaty's scaling method for priorities[J]. Journal of Mathematical Psychology, 1984, 28(4): 467—478.

作者简介：

董玉成(1979—)，男，湖北枝江市，博士，讲师，研究方向：群体决策，局内决策，Email：ycdong@mail.xjtu.edu.cn；

徐寅峰(1962—)，男，吉林东丰县，博士，教授，博士生导师，研究方向：组合优化与近似算法；

王　扬(1981—)，女，陕西西安市，博士生，研究方向：占线管理问题与竞争分析.