第 22 卷第 10 期(总第 130 期)　　系 统 工 程　　Vol 22, No. 10
2004 年 10 月　　Systems Engineering　　Oct , 2004

文章编号: 1001-4098(2004)10-0001-04

"鹰鸽博弈"的量子分析*

王　斌[1,2], 徐寅峰[1], 孙利辉[3]

(1. 西安交通大学 管理学院, 陕西 西安　710049;
2. 青岛理工大学, 山东 青岛　266033;
3. 青岛大学, 山东 青岛　266071)

摘　要: 在经典的"鹰鸽博弈"中, 纳什均衡为一方采取"鹰"策略, 而另一方采取"鸽"策略。本文使用量子博弈的方法研究经典的"鹰鸽博弈", 通过量子策略给出了一个不同于经典博弈的新的纳什(Nash)均衡, 即博弈双方均采取"鸽"策略, 从而达到帕累托(Pareto)最优。

关键词: 博弈; 量子策略; 纳什均衡

中图分类号: F224.32　　**文献标识码**: A

1　引言

博弈论作为应用数学的一个具有重要意义的分支, 早在 20 世纪 40 年代就已诞生[1], 但长期以来并没有受到足够的重视, 直到 20 世纪 70～80 年代, 由于其在经济学、社会科学及生物学中的广泛应用, 博弈论得到了蓬勃发展, 并已成为现代经济学的基础之一。在博弈论中, 纳什均衡是最重要的概念之一, 假设有 n 个参与人的战略式表述博弈 $G=\{S_1,\cdots,S_n;u_1,\cdots,u_n\}$, 其中 S_i 为第 i 个参与人的所有可选择的战略的集合, u_i 为第 i 个参与人的效用函数。战略组合 $s^*=(s_1^*,\cdots,s_i^*,\cdots,s_n^*)$ 是一个纳什均衡, 如果对于每一个 i, s_i^* 是给定其它参与人选择 $s_{-i}^*=(s_1^*,\cdots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\cdots,s_n^*)$ 的情况下第 i 个参与人的最优战略, 即对所有的 $s_i\in S_i$ 和所有的 i, 都有 $u_i(s_i^*,s_{-i}^*)\geq u_i(s_i,s_{-i}^*)$ [2]。而经济学中的帕累托最优是指耗用一定总量的资源于各种不同途径所生产出来的国民收入的"集合体效应"已达到最大值。

近几年, 一些学者将量子力学的一些思想和方法与博弈论相结合, 提出了量子博弈理论。量子博弈论的研究目前已取得了一些成果, 如 D. A. Meyer 研究了"PQ 翻硬币问题"[2], 一个和传统的翻硬币游戏类似的博弈过程。假设有 P、Q 两人以翻动硬币来决定胜负, 开始时, 硬币正面向上放在一个暗箱中。首先, 由 Q 来决定如何翻动, 然后是 P, 最后是 Q. 在整个操作过程中, 双方均不知对方是如何翻动硬币的。双方操作结束后, 打开箱子, 若硬币正面向上则 Q 赢, 否则为 P 赢。这是一个零和博弈, 当双方均采用经典策略时, 有一个混合策略纳什均衡, 即双方均以 0.5 的概率翻动硬币, 期望收益为零。而当 Q 采用了量子策略后, 若 P 仍然采用经典策略, 则最终获胜的总是 Q. 此外, J. Eisert 等量子化了经典博弈中著名的"囚徒困境"[4], 通过量子策略找到了一个不同于经典博弈的新的均衡, 从而走出了经典模型中的困境。L. Marrinatto 和 T. Weber, S. C. Benjamin 以及 P. M. Hayden 等对量子博弈的研究也作出了一些开创性的工作[5,6]。

本文研究了经典的鹰鸽博弈, 将其量子化, 给出了不同于经典纳什均衡的量子化的纳什均衡, 而且其是帕累托最优的。

2　经典"鹰鸽博弈"

两动物为某一食物而争斗, 每只动物都能像鹰或鸽那样行动, 其收益矩阵如图 1 所示。表中第一个数值为参与者 A 的收益, 第二个数值为参与者 B 的收益。对双方来说最好的结果是都像鸽一样, 采取和平的行动, 得到帕累托最优解。最坏的结果是都像鹰一样, 采取进攻性行动, 结果两败俱伤。很容易可以知道, 该博弈有两个纯策略纳什均衡, (H, D) 和 (D, H) (即(鹰, 鸽) 和 (鸽, 鹰))。

* **收稿日期**: 2004-08-16
基金项目: 国家自然科学基金委优秀创新群体项目(70121001)
作者简介: 王斌(1963-), 男, 河北蓟县人, 青岛理工大学副教授, 西安交通大学管理学院博士研究生, 研究方向: 博弈论及其应用; 徐寅峰(1962-), 男, 吉林东丰人, 西安交通大学管理学院教授, 博导生导师。

		B	
		鸽	鹰
A	鸽	4, 4	1, 6
	鹰	6, 1	0, 0

图 1 鹰鸽博弈收益矩阵

3 量子化模型

借用量子力学中的笛拉克(Dirac)符号，将参与人A 或B 采取的策略D (鸽)或H (鹰)分别用二维希尔伯特(Hilbert)空间 S_H 中的基矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示，因为D 和H 是两个针锋相对的策略，所以将 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 作为 S_H 的正交规范基，则 $S_H=\{x \mid x=x_1|0\rangle+x_2|1\rangle,\ x_1=\langle x|0\rangle,\ x_2=\langle x|1\rangle\}$，其中 $\langle x|i\rangle$ 表示 x 与 i 的内积，$i=1,2$。采用量子力学中经常使用的归一化思想，将 S_H 中的量进行单位化，则参与人A 或B 采取的量子态策略为其某个线性组合，$a|0\rangle+b|1\rangle$，其中 $a, b\in C$ (C 为复数域)，$a\bar{a}+b\bar{b}=1$，$a\bar{a}$ 为参与人采取鸽策略D 的概率，$b\bar{b}$ 为同一参与人采取鹰策略H 的概率。

在J. Eisert 等人的文章中，给出了一个量子化的物理模型(如图 2 所示)。这个模型由以下四个部分组成：①一个两比特(bit)产生源，每一个参与人拥有一个比特，可视为系统的自然初始状态，当然，自然初始状态不一定必须是 $|0\rangle$、$|1\rangle$；②转换装置J，将系统的自然初始状态转化为系统可处理的初始状态 $|\Psi_0\rangle$；③参与人的操作装置，允许参与人操作属于他自己的那一个比特，这些操作就是参与人采取的策略 U_A、U_B；④一套测量装置，测量装置包括两部分——一个可逆的两位量子门 J^+ 以及一对探测器，J^+ 门将经J 门转换并被参与人操作后的状态还原。通过测量两个比特的最终状态以决定每一位参与人的收益值。每一位参与人都十分清楚这四部分，因此这个模型所构成的博弈属于完全信息静态博弈。

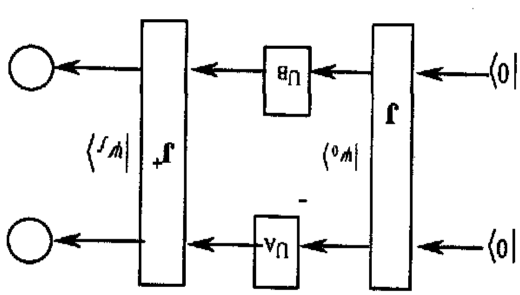

图 2 两个参与人的量子博弈模型

图 2 可以类比为市场中的竞争资源配置模型，两比特相当于各参与方拥有给定价值的资源总量，经过一定的程序(J 门)后进入市场，但各参与方的资源结构可能各异；操作装置相当于市场竞争机制，操作相当于各参与方对拥有资源的处置方式；测量装置是资源在市场上收益值的衡量标准，收益值相当于经资源配置交换后，各参与方最终获得的初始资源收益。

将经典策略D、H 的可能结果对应为一个两态系统(即一个量子比特)的希尔伯特空间中的基矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，则在任一时刻，博弈的状态可以用这两个量子比特(分别属于两个参与人)的张量积空间中的态表示。这个张量积空间的基矢为 $|00\rangle$、$|01\rangle$、$|10\rangle$、$|11\rangle$，其中第一项表示参与人A 的量子比特，第二项表示B 的量子比特。

博弈的初态用 $|\Psi_0\rangle=J|00\rangle$ 表示，J 为双方都知道的酉算符，A、B 的策略分别用 U_A、U_B (属于策略空间 S)表示。由于参与人的策略行为相互独立，U_A 和 U_B 应分别作用在各自的量子比特上，因此策略空间 S 可以等同于 2×2 酉群的某个子集。在A、B 实施了各自的策略行动之后，博弈的状态变为 $(U_A\otimes U_B)J|00\rangle$。然后A、B 将这个态交给测量装置以决定其各自的收益。J^+ 门将经J 门转换并被参与人操作后的状态还原后，在到达探测器之前的状态为 $|\Psi_f\rangle=J^+(U_A\otimes U_B)J|00\rangle$，$J^+$ 为J 的共轭转置，对最终态的一个探测可得到参与人的一个结果，根据收益矩阵可给出相应的收益。由于量子力学从本质上是概率性理论，因此参与人的收益应为“期望”收益，其中A、B 的期望收益分别为(参见图 1 的收益矩阵)：

$$\$_A = 4P_{00}+1P_{01}+6P_{10}+0P_{11} \quad (1)$$

$$\$_B = 4P_{00}+6P_{01}+1P_{10}+0P_{11} \quad (2)$$

其中 $P_{ij}=|\langle ij|\Psi_f\rangle|^2$，是测量结果为 $|ij\rangle$ 的联合概率，$i, j=0$ 或 1。

4 量子博弈的纳什均衡

由于将“鹰鸽博弈”扩展在二维希尔伯特空间 S_H 中进行讨论，因此假设策略空间 S 为 2×2 酉阵的一个两参数集合[4]：

$$U(\varphi,\theta)=\begin{bmatrix} e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix},$$

$$0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

当 $\varphi\neq 0$ 时，就产生了经典博弈中所没有的量子策略，而且经典策略包含在 S 中。如鸽策略D 可表示为 $D=U(0,0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，鹰策略H 可表示为 $H=U(\pi,0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$。假设A 参与人初始态为 $|0\rangle$(即鸽状态)，当A 采取H 策略时，$U(\pi,0)|0\rangle=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=0|0\rangle-1|1\rangle=-|1\rangle$，即表示A 采取H 后，以概率 $(-1)^2=1$ 达到 $|1\rangle$ 态(即鹰状态)。取 $J=\exp\left\{i\frac{\gamma}{2}H\otimes H/2\right\}$[4]，

其中 $\gamma\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 是实参数, 表示博弈中双方纠缠的度量, 称之为纠缠度。当 $\gamma=0$ 时, 由于A、B 的任何一组策略 U_A 和 U_B 均为独立的, 其联合概率 P_{AB} 是可以分解的。

4.1 纠缠度 $\gamma=0$ 的纳什均衡

当 $\gamma=0$ 时, $J=\exp\{0iH\otimes H/2\}=D\otimes D$, $J|00\rangle=(D\otimes D)|00\rangle=D|0\rangle\otimes D|0\rangle=|0\rangle|0\rangle=|00\rangle$。

若给定B 采取D 策略, 则 $J^+(U(\theta,\varphi),D)J|00\rangle=$

$$\begin{bmatrix} e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle-\sin\frac{\theta}{2}|10\rangle$$

这表示在给定B 采用D 策略时, 若A 采用一般的量子策略 $U(\varphi,\theta)$, 博弈的结果为以概率 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 取 $|00\rangle$ 态, 以概率 $\sin^2\frac{\theta}{2}$ 取 $|10\rangle$ 态。由(1)式得

$$\begin{aligned}&\$_A(U(\theta,\varphi),D)\\&=4\cos^2\frac{\theta}{2}+6\sin^2\frac{\theta}{2}\\&=4+2\sin^2\frac{\theta}{2}\\&\le 6=\$_A(H,D)\end{aligned}\qquad(3)$$

其中 $\$_A(H,D)=6$ 表示, 当A 采用H 策略, B 采用D 策略时, A 的收益为6。后边推导的各式的含义与上述解释类似。

若给定A 采取H 策略, 则 $J^+(H,U(\theta,\varphi))J|00\rangle=$

$$\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}=-e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|10\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|11\rangle$$

由(2)式得

$$\$_B=(H,U(\theta,\varphi))=1\cos^2\frac{\theta}{2}\le 1=\$_B(H,D)\qquad(4)$$

故(H,D)为纳什均衡。同理可证明(D,H)也是纳什均衡。由上述分析可知, 独立状态下的量子博弈并没有超越经典的博弈。

4.2 最大纠缠度 $\gamma=\frac{\pi}{2}$ 的纳什均衡

当 $\gamma=\frac{\pi}{2}$ 时, $J=\exp\left\{i\frac{\pi}{2}H\otimes H/2\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(D\otimes D+iH\otimes H)$, $J|00\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+i|11\rangle)$, $J^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(D\otimes D-iH\otimes H)$。

若给定B 采取D 策略, 则 $J^+(U\otimes D)J|00\rangle=\cos\varphi\cdot\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle-\sin\frac{\theta}{2}|10\rangle-i\sin\varphi\cos\frac{\theta}{2}|11\rangle$, 所以

$$\begin{aligned}&\$_A(U(\theta,\varphi),D)\\&=4\cos^2\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}+6\sin^2\frac{\theta}{2}\\&=6-2\cos^2\frac{\theta}{2}(2\sin^2\varphi+1)\\&\le 6=\$_A(H,D)\end{aligned}\qquad(5)$$

而若给定A 采取H 策略, 则 $J^+(H\otimes U)J|00\rangle=-\sin\varphi\cdot\cos\frac{\theta}{2}|01\rangle-\cos\varphi\sin\frac{\theta}{2}|10\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|11\rangle$, 所以

$$\begin{aligned}&\$_B(H,U)\\&=6\sin^2\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}+1\cos^2\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}\\&=(1+5\sin^2\varphi)\cos^2\frac{\theta}{2}\\&\le 6=\$_B(H,U(0,\frac{\pi}{2}))\\&\ne\$_B(H,D)\end{aligned}\qquad(6)$$

故(H,D)不再是纳什均衡。同理可证明(D,H)也不再是纳什均衡。

记策略 $Q=U(0,\frac{\pi}{2})=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix}$, 若给定B 采取策略Q, 则 $J^+(U\otimes Q)J|00\rangle=-\sin\varphi\cos\frac{\theta}{2}|00\rangle+\sin\frac{\theta}{2}|01\rangle+\cos\varphi\cos\frac{\theta}{2}|11\rangle$,

$$\begin{aligned}&\$_A(U,Q)\\&=4\sin^2\varphi\cos^2\frac{\theta}{2}+1\sin^2\frac{\theta}{2}\\&\le 4\cos^2\frac{\theta}{2}+1\sin^2\frac{\theta}{2}\\&\le 4=\$_A(Q,Q)\end{aligned}$$

类似地有 $\$_B(Q,U)\le\$_B(Q,Q)$, $\forall U_B\in S$, 因此(Q,Q)为纳什均衡。因为 $\$_A(Q,Q)=\$_B(Q,Q)=4$, 这样的结果在公平性的前提下, A、B 均获得最大的收益值, 使双方的收益值之和达到Pareto 最优。

5 结束语

鹰鸽博弈研究的实际上并不仅仅是鹰和鸽两种动物之间的博弈, 也是同一物种、种群内部竞争和冲突中的策略和均衡问题, 其中"鹰"和"鸽"分别指"攻击型"和"和平型"两种策略类型, 在经典的鹰鸽博弈中, 其纳什均衡为(鹰, 鸽)和(鸽, 鹰), 从收益最大化的角度看, 只能有一方达到最优, 而不是"双赢"的结果。而当双方超越经典策略, 采取量子策略后, "奇迹"出现了, 纳什均衡成为了"双赢"的(鸽, 鸽)策略。量子策略对应的是酉阵 $U(\varphi,\theta)$, 其取值为复数域 C, 当 $\varphi=0$ 时, 其取值缩小为实数域 R 上, 酉阵 $U(0,\theta)$ 对应的策略变为经典的纯策略或混合策略。这可以做如下类比, 当博弈双方只拥有用实数表达的资源或智慧时, 博弈的结果只能是经典的(D, H)或(H, D)。而当博弈双方拥有的资源或智慧扩大为可用复数表达时, 就可更

上一层楼, 达到最好的帕累托最优。然而, 量子博弈作为博弈理论的一个新分支, 仍然有许多问题需要探讨, 如酉阵 $U(\varphi, \theta)$ 中的参数 φ, θ 以及虚数 i 确切的管理或经济学意义等, 都是需要今后做进一步深入研究的问题。

参考文献:

[1] Von Neumann J, Morgenstern O. The theory of games and economic behavior[M]. Princeton: Princeton University Press, 1944.

[2] 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1996.

[3] Meyer D A. Quantum strategies[J]. Phys Rev. lett., 1999, 82: 1052～1055.

[4] Eisert J, Wilkens M, Lewenstein M. Quantum games and quantum strategies[J]. Phys Rev. lett., 1999, 83; 3077～3088.

[5] Marinatto L, Weber T. A quantum approach to static games of complete information[J]. Phys Lett. A, 2000, 272; 291～303.

[6] Benjamin S C, Hayden P M. Multiplayer quantum games[J]. Phys. Rev. A, 2001, 64, 030301(R).

[7] 尹鸿钧. 量子力学[M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1999.

Quantum Analysis of "Hawk and Dove Game"

WANG Bin[1,2], XU Yin-feng[1], SUN Li-hui[3]

(1. School of Management, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. Qingdao Polytechnic University, Qingdao 266033, China;

3. Qingdao University, Qingdao 266071, China)

Abstract: In the classical "hawk and dove game", the Nash equilibrium is that one player adopts "hawk" strategy and the other adopts "dove" strategy. In this article, we study the "hawk and dove game" in method of quantum game, and conclude a new Nash equilibrium by means of quantum strategy, which is different from classical game, both game players adopt "dove" strategy to attain Pareto optimization.

Key words: Game Theory; Quantum Strategy; Nash Equilibrium