第30卷 第2期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol.30 №2
1996年2月 JOURNAL OF XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY Feb.1996

关于Voronoi 图的一个不等式

徐寅峰 杨波艇
(管理学院) (理学院)

摘 要

提出并证明了关于Voronoi 图的一个新性质: 设 S 是平面上任一有限点集, d_s 是 S 中最近两点之间的距离, p 是 S 中任一点, $V(p)$ 是关联于 p 的Voronoi 多边形, $A(p)$ 是 $V(p)$ 的面积, 则 $A(p)\geq\frac{3^{1/2}}{2}d_s^2$.

关键词: Voronoi 图 计算几何 组合优化
中国图书资料分类法分类号: O 157.9

0 引 言

Voronio 图是俄国数学家 G. Voronoi 于1908年在他的一篇关于二次形的论文中提出的, 经过几十年的发展, 目前已在计算几何、组合优化、图论等领域有广泛的应用[1]. 给定平面中 n 个点的集合 $S=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, 在计算几何中经常要考虑下面问题: 对于 S 中的每个点 p_i, 与 S 中的其它点比较而言, 平面中更接近于 p_i 的点 x 的轨迹是什么?也就是要研究集合

$$\{x\in R^2 \mid d(x, p_i)\leq\min_{1\leq j\leq n} d(x, p_j)\}$$

的结构和性质, 其中 $d(x, y)$ 表示平面上点 x 和 y 之间的欧氏距离 给定两个点 p_i 和 p_j, 集合 $\{x\in R^2 \mid d(x, p_i)\leq d(x, p_j)\}$ 恰好是由线段 $\overline{p_ip_j}$ 的垂直平分线确定的包含 p_i 的半平面, 用 $H(p_i, p_j)$ 表示此半平面 显然, 平面中更接近于 p_i (与 S 中的其它点比较而言) 的点的轨迹(用 $V(p_i)$ 表示它) 是 n-1 个半平面的交, 且是一个不多于 n-1 条边的凸多边形区域, 即

$$V(p_i)=\bigcap_{j\neq i} H(p_i, p_j)$$

$V(p_i)$ 称为关于 p_i 的Voronoi 多边形 这样的 n 个区域把平面划分为一个凸网, 称它为Voronoi 图, 记为Vor (S). 显然, 若 $x\in V(p_i)$, 则 p_i 是 x 的一个最近邻近点 因此, Voronoi 图包含了给定点集确定的所有邻近信息 关于Voronoi 图已有许多研究结果, 它的一些性质可见参考文献[1～ 3].

收到日期:1993 -10-10. 徐寅峰: 男,1962 年9月生, 战略与决策研究所, 副教授

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

本文提出了Voronoi 图的一个新性质: 设$A(p_i)$是$V(p_i)$的面积, $d_s=\min\{d(p_i,p_j)\,|\,p_i,p_j\in S,\ i\neq j\}$, 则对$S$ 中的任意点p_i, 下面不等式成立

$$A(p_i)\geq\frac{3^{1/2}}{2}d_s^2 \tag{1}$$

1 不等式(1)的证明

平面上包含S 的最小凸集称为S 的凸包, 记为Conv(S). 因为S 是有限点集, 所以Conv(S)的边界一定是线段, 并且Conv(S)的顶点集合是S 的一个子集

引理1 Voronoi 多边形$V(p_i)$有界的充要条件是p_i不是Conv(S)的边界点

证明 (1)充分性 若p_i不是Conv(S)的边界点, 则在S 中存在p_1,p_2,p_3,p_4, 使得p_i在四边形$p_1p_2p_3p_4$的内部 并且$p_1p_2p_3p_4$的内部不含S 中的其它点 下面分两种情形进行讨论

(i)如图1所示, 如果p_i位于此四边形两条对角线p_1P_3和p_2p_4的交点处, 则$V(p_i)$是边分别垂直于p_1p_3和p_2p_4的平行四边形 显然$V(p_i)$有界

(ii)如果p_i不位于四边形$p_1p_2p_3p_4$两条对角线的交点处, 则p_i必在p_1,p_2,p_3,p_4中某三点

图1 情形(i)的图示

图2 情形(ii)的图示

组成的三角形的内部 不妨设p_i在三解形$p_1p_2p_3$的内部, 如图2所示。设过点p_1,p_2,p_i的圆为C_{12}, 过点p_2,p_3,p_i的圆为C_{23}, 过点p_3,p_1,p_i的圆为C_{31}. 在圆C_{12}上(类似地用于C_{23}笔C_{31}), p_1和p_2之间不包含p_i的圆弧记为A_{12}. 显然, 对$\forall a\in A_{12}$, 有

$$\min_{j=1,2}\{d(a,p_j)\}< d(a,p_i) \tag{2}$$

设C 是包含C_{12},C_{23}和C_{31}的一个闭圆盘, C 的补集为$\overline{C}$. 下面我们先证明对$\forall x\in\overline{C}$, 都有

$$\min_{j=1,2,3}\{d(x,p_j)\}< d(x,p_i) \tag{3}$$

考虑线段$\overline{xp_i}$, 由约当曲线定理, $\overline{xp_i}$和三角形$p_1p_2p_3$的边之一相交, 不妨假设和$\overline{p_1p_2}$相交, 从而$\overline{xp_i}$也和A_{12}相交于点u. 由(2)式知

$$\min_{j=1,2}\{d(x,p_j)\}< d(x,u)+\min_{j=1,2}\{d(u,p_j)\}< d(x,p_i)$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由此可知不等式(3)成立, 从而由Voronoi 多边形的定义和不等式(3)知, 对$\forall x\in\overline{C}$, 都有$x\notin V(p_i)$. 因此$V(p_i)\subset C$, 即$V(p_i)$有界.

(2) 必要性　若$V(p_i)$有界, 设$e_1, e_2, \cdots, e_k\ (k\geq 3)$是$V(p_i)$的边的序列, 每条边$e_h\ (h=1, \cdots, k)$属于一个线段$\overline{p_ip_h'}\ (p_h'\in S)$的垂直平分线. 由此可知$p_i$在多边形$p_1'p_2'\cdots p_k'$内, 从而$p_i$不是Conv$(S)$的边界点.　　证毕

由引理1显然下面定理成立.

定理1　(i) $A(p_i)=+\infty$的充要条件是p_i为Conv(S)的边界点. (ii) S中没有三点是共线的, 且$A(p_i)=+\infty$, 则p_i是Conv(S)的一个顶点.

由定理1知, 我们已证明了当p_i是Conv(S)的边界点时不等式(1)成立, 所以下面我们只须考虑S中不在Conv(S)的边界上的那些点. 设点集$N(p_i)$是S的一个子集, 并且当且仅当S中的点$p_j\ (j\neq i)$与p_i的垂直平分线与$V(p_i)$的某条边有重合部分时, $p_j\in N(p_i)$.

为了不失一般性, 我们可假设$S=\{p_0\}\cup N(p_0)$. 下面只须对p_0点证明不等式(1)成立.

设$N(p_0)=\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}\ (k\geq 3)$, 并且$p_1, p_2, \cdots, p_k$是$N(p_0)$中顺时针排列的点序列, $q_1, q_2, \cdots, q_k$是$V(p_0)$中顺时针排列的顶点序列. m_i是$\overline{p_0p_i}$的中点, $i=1, \cdots, k$, 如图3所示. 点集S中元素的个数记为$|S|$. 首先, 我们考虑$|N(p_0)|\geq 7$的情形.

图3　$V(p_0)$的图示

定理2　若$|N(p_0)|=k\geq 7$, 则$A(p_0)>\frac{7}{8}d_s^2$.

证明　设$p_{k+1}=p_1$, $k_{k+1}=m_1$, 如图3所示.

$$\begin{aligned}A(p_0)&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}[d(p_0,m_i)\cdot d(m_i,q_i)+d(p_0,m_{i+1})\cdot d(q_i,m_{i+1})]\\&\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4}d_s[(dm_i,q_i)+d(q_i,m_{i+1})]\\&>\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{4}d_s\cdot d(m_i,m_{i+1})\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{8}d_s\cdot d(p_i,p_{i+1})\\&\geq\frac{7}{8}d_s^2\end{aligned}$$

证毕

因为$\frac{7}{8}>\frac{3^{1/2}}{2}$, 由定理2知$A(p_0)>\frac{3^{1/2}}{2}d_s^2$. 即当$|N(p_0)|\geq 7$时, 不等式(1)成立. 下面我们考察$3\leq|N(p_0)|\leq 6$时的情形.

定理3　设$|N(p_0)|=k, 3\leq k\leq 6$, $V_{\min}(p_0)$是边数为k的多边形$V(p_0)$中面积最小的Voronoi 多边形, 则$V_{\min}(p_0)$是正k边形.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

证明 设 $q_0 = q_k$, 如图3所示, 则

$$A(p_0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} d(p_0, m_i) \cdot d(q_{i-1}, q_i)$$
$$\geq \frac{1}{4} d_s \sum_{i=1}^{k} d(q_{i-1}, q_i) \tag{4}$$

若将圆心为 p_0, 半径为 $\frac{d_s}{2}$ 的圆记为 $C(p_0, \frac{d_s}{2})$, 则由(4)式可知

$V_{\min}(p_0) \in \{V_c(p_0) \mid V_c(p_0)$ 是 p_0 的Voronoi多边形, 且 $V_c(p_0)$ 是圆 $C(p_0, \frac{d_s}{2})$ 的外接 k 边形$\}$ (5)

由(4)、(5)式知, $V_{\min}(p_0)$ 是 $V_c(p_0)$ 中周长最小的多边形. 在 $V_c(p_0)$ 中, 设 $\angle m_i p_0 q_i = \alpha_i$, $i = 1, \cdots, k$, 如图4所示, 则 $V_c(p_0)$ 的周长为

$$\sum_{i=1}^{k} 2d(m_i, q_i) = d_s \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tg}\alpha_i$$

考虑非线性规划问题(NP)

$$\min \sum_{i=1}^{k} \mathrm{tg}\alpha_i$$
$$\text{st.} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \pi$$
$$0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \cdots, k$$

显然(NP)有最优解. 设 λ 是(NP)的Lagrange乘子. 由最优性条件知, 最优解满足

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{tg}\alpha_i)' + \lambda = 0, \quad i = 1, \cdots, k \\ &\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \pi \\ &0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \cdots, k \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

图4 定理3中的图示

由(6)式可解出

$$\alpha_i = \frac{\pi}{k}, \quad i = 1, \cdots, k \tag{7}$$

不难验证(NP)是一个凸规划问题, 所以(7)式是(NP)的整体最优解. 因此, $V_c(p_0)$ 中周长最小的多边形是正 k 边形, 从而 $V_{\min}(p_0)$ 是正 k 边形. 证毕

当 $3 \leq k \leq 6$ 时, 由定理3知, $V_{\min}(p_0)$ 是正 k 边形, 且此时 $d(p_0, p_i) = d_s$, $i = 1, \cdots, k$. 所以, 当 $k = 3,4,5,6$ 时, $V_{\min}(p_0)$ 的面积分别是 $\frac{3(3)^{1/2}}{4} d_s^2$, d_s^2, $\frac{5}{4}(5-2(5)^{1/2})^{1/2} d_s^2$, $\frac{3^{1/2}}{2} d_s$. 因此, 当 $3 \leq |N(p_0)| \leq 6$ 时, $A(p_0) \geq \frac{3^{1/2}}{2} d_s^2$.

综上所述, 我们证明了本文所提出的关于Voronoi图的不等式(1)是正确的.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

1 Edelsbrunner H. Algorthms in combinatorial geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1987

2 Preparata F, Shamos M T. Computational geometry —an introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1985

3 Graham R L, Yao F F. A whirlwind tour of computational geometry. Amer Math Mothly, 1990, 88 (6): 687～701

4 Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications. London: Macmillan Press, 1972

(编辑 朱元昌)

AN INEQUALITY ON VORONOI DIAGRAM

Xu Yinfeng *Yang Boting*
(School of Mangagement) (School of Sciences)

Abstract

In this paper, a new property on Voronoi diagram is proposed: Let S be a finite planar point set, for each $p \in S$, $V(p)$ denote the Voronoi polygon associated with p, $A(p)$ denote the area of $V(P)$, d_s denote the distance of the nearest pair of points in S, then we have the inequality $A(p) \geq \frac{3^{1/2}}{2} d_s^2$.

Keywords: *Voronoi diagram computational geometry combinatorial optimization*

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net